数 学 年 刊
15A: 6 (1994), 640—643.

关于集值映象方程的一类问题

杨 书 郎
(厦门大学系统科学系,厦门 361005)

提 要

本文用 fp-同伦方法，在特殊的技巧和边界条件下，研究了有序的(B)空间中集值凝聚映象方程的正解等问题.

关键词 集值映象方程,正解,fp-同伦,Banach 空间.
MR(1991)主题分类 47H04, 47H09.

§1. 引 言

本文研究有序的 Banach 空间 X 中的集值凝聚映象方程

$$\theta\in T_1(x)-x \tag{1.1}$$

的正解等在非线性分析中有意义的问题.

本文的研究使用了 fp- 同伦工具，而不是常用的不动点指数(拓扑度)工具. 如所周知,fp- 同伦方法长期以来被用于处理方程可解性问题，如 Schaefer、Granass、Smart、Potter 与 Browder 等的重要工作[3,4,5]，又如文[7, 8, 9]等. 可是,对于非零解(正解)问题,人们一般都使用较复杂的拓扑度(不动点指数),因为，单纯用 fp- 同伦方法处理这类问题,至少可说是有极大困难的.

本文工作也表明,在特殊的技巧与变换的配合下，在特定边界条件下，fp- 同伦方法是研究正解(非零解)问题的又一个简便的工具.

§2. 映象方程的正解

本节中使用的符号主要如下: $K:=X$ 中的锥; $\leqslant:=X$ 中由 K 导入的半序; C、$D:=X$ 中 θ 的闭凸邻域且 D 有界; $\hat{C}_a:=C$ 关于 a 的径向收缩[7]、$\hat{C}:=\hat{C}_\theta$; $cf(K):=K$ 的不空的闭凸子集族; C_K、C_K^0、$\partial C_K:=C\cap K$、$C^0\cap K$、$\partial C\cap K$; $I:=[0,1]$; $T_I(x):=T(x,I)$; $E_\vee(F,A):=\{x\in A\setminus\{\theta\}$; 有 $t>1$ 使 $tx\in F(x)\}$.

有关"广义有界性"、"K 映象"等概念见文[7],另外

定义 2.1 设 $F:C_K\to 2^X$. 记 $\mathring{K}:=K\setminus\{\theta\}$.

(1) F 叫做满足条件$(XC;\partial C_K)$如果

本文 1992 年 10 月 12 日收到，1993 年 2 月 26 日收到修改稿.

$$y \not\geqslant x \quad (x \in \partial C_K,\ y \in F(x) \backslash C_K). \tag{2.1}$$

(2) 设 $w \in \mathring{K}$, 记 $L(w):=\{x \in K;$ 有 $\beta>0$ 使得 $x \geqslant \beta w\}$; 又设 $D \subset C$. F 叫做满足条件$(XQ; \partial D, w)$如果

$$y \not\leqslant x, \ (x \in L(w) \cap \partial D,\ y \in F(x)). \tag{2.2}$$

定理2.1 设(1)有 $T_0: C_K \to cf(K)$ 满足条件$(XC, \partial C_K)$; (2) 有 D 与 $r_0 \in (0, 1)$使得 $D \subset r_0 C$; (3) T_0 在 D_K^0 中无不动点; (4) 有 K 映象 $T: C_K \times I \to cf(K)$使得: (i) $T_I: C_K \to 2^K$ 是个使 $E_\vee(T_I, \partial C_K)$有界的凝聚映象;

(ii) $$T_i(x) = T(x, i) \quad (x \in C_K,\ i=0, 1); \tag{2.3}$$

与 (iii) $$x \overline{\in} T_I(x) \quad (x \in \partial C_K \cup \partial D_K). \tag{2.4}$$

则, 如下两命题择一成立: 或(1)固有元集 $E_\vee(T_1, C_K^0 \backslash D)$无界; 或(2)方程(1.1)在 $C_K^0 \backslash D$ 中有正解.

证 设 $E_\vee(T_1, C_K^0 \backslash D)$有界, 则 $E_\vee(T_1, C_K^0)$也有界. 现在

1. 任取 θ 的有界凸开邻域 G 使得

$$E_\vee(T_1, C_K^0) \cup E_\vee(T_I, \partial C_K) \cup D \subset G. \tag{2.5}$$

令 $E:=C \cap \overline{G}$. 又任取 $b \in E_K$, 且考虑集族 $\Gamma:=\{M \in cf(K);\ b \in M,\ T_I(\hat{E}(M)) \subset M\}$. 可证 $\Gamma \neq \varnothing$.

记 $Y:=\bigcap_{M \in \Gamma} M$. 易见 $Y \in cf(K)$. 可以证明 $Y_1:=\overline{\mathrm{con}\ v}\,(T_I(\hat{E}(Y)) \cup \{b\}) \subset Y$. 故

$$T_I(\hat{E}(Y_1)) \subset T_I(\hat{E}(Y)) \subset \overline{\mathrm{con}\ v}\,(T_I(\hat{E}(Y)) \cup \{b\}) = Y_1.$$

可见 $Y_1 \in \Gamma$, 所以又有 $Y \subset Y_1$. 于是

$$Y = Y_1 = \overline{\mathrm{con}\ v}(T_I(\hat{E}(Y)) \cup \{b\}), \tag{2.6}$$

由(2.6)可得 $\hat{E}(Y)$是相对紧, 进一步可得 Y 为紧凸.

2. 据 Dugundji 定理[6], Y 是 X 的一收缩核, 设 $\varphi: X \to Y$ 是相应的保核收缩.

可以证明, 有 $r \in (r_0, 1)$与 $s \in (0, 1)$使得

$$x \overline{\in} T_I(x)(x \in E_K \cap ((C \backslash rC) \cup (D \backslash sD))) \tag{2.7}$$

与 $$mx \overline{\in} T_I(x)(m>1,\ x \in (\partial G \cap K) \cap (C \backslash rC)). \tag{2.8}$$

现构造映象 $H: X \times I \to cf(K)$与 $H_i: X \to cf(K)$如下

$$H(x, t):=T(\hat{E}(\varphi(x)),\ f(\hat{E}(\varphi(x)))t)(x \in X,\ t \in I)$$

$$H_i(x):=H(x, i) \quad (x \in X,\ i=0、1),$$

其中, 泛函 $f: C \to R$ 定义如下

$$f(x):=\begin{cases} (1-p(x))/(1-r) & (r<p(x) \leqslant 1), \\ 1 & (p(x) \leqslant r \text{ 且 } q(x)>1), \\ (q(x)-s)/(1-s) & (s<q(x) \leqslant 1), \\ 0 & (q(x) \leqslant s), \end{cases} \tag{2.9}$$

这里, p、q 分别是 C 与 D 的 Minkowski 泛函.

可以证明上述 H 是个 K 映象, 且使得

$$\mathrm{con}\ v(H_I(X)) \subset Y. \tag{2.10}$$

可见, $\overline{H_I(X)}$是个不空紧集.

3．据[7]，有 $u_0\in X$ 使得 $u_0\in H_1(u_0)=T(\hat{E}(\varphi(u_0)),\ f(\hat{E}(\varphi(u_0))))$．再由(2.10)便可得 $u_0\in T(\hat{E}(u_0),\ f(\hat{E}(u_0)))$．令 $u:=\hat{E}(u_0)$，且讨论如下两种情况：

(1) 情况 1．$u_0\bar{\in}E$，这时必定有 $m>1$ 使 $u_0=mu$，且使得：或 i) $u\in G\cap\partial C$ 或 ii) $u\in\partial G\cap C$，但这都不可能．因为若是(i)，则可得 $mu\in T_0(u)\backslash C$ 且 $mu>u$，这矛盾于定理的条件(1)；若是 ii)，则可得 $u\in rC\cap\partial G_K$，且 $mu\in T_1(u)$，这矛盾于(2.5)．可见，本情况 1 必不会发生．于是必是如下的

(2) 情况 2．$u_0\in E$．这时，$u_0=\hat{E}(u_0)$．故得 $u_0\in T(u_0,\ f(u_0))$．可以证明 $p(u_0)\leqslant r$ 且 $q(u_0)>1$，故由(2.9)便得 $f(u_0)=1$，于是 $u_0\in T_1(u_0)$，则 u_0 是方程(1.1)的一个正解，且显见 $u_0\in C_K^0\backslash D$．

定理 2.2 设(i)定理 2.1 的条件(1)、(2)与(3)均被满足；(ii) 有 K 映象 T：$C_K\times I\to cf(K)$ 使得(2.3)、(2.4)都成立，还使得 T_I: $C_K\to 2^K$ 是个广义有界的凝聚映象．则，方程(1.1)在 $C_K^0\backslash D$ 中有正解．

证 任取 $u\in T_I(C_K)$，记 $B:=\{-\lambda u;\ \lambda\in I\}$．可以证明

$$E_\vee(T_I,\ C_K)\subset\hat{C}(\mathrm{conv}(T_I(C_K))+B).$$

现因 T_I 是广义有界的，又因 B 有界，故据[7]，$\hat{C}(\mathrm{conv}(T_I(C_K))+B)$有界．于是 $E_\vee(T_I,\ C_K)$有界．由定理 2.1 得，本定理的结论成立．

应用上面结果时，需要检验条件"T_0 在 D_K^0 中无不动点"是否满足．但这种检验，有时有困难，甚至可能有很大困难．下面建立一些结果，使得可以不必进行这种检验．

定理 2.3 设(1)有 C、D 与 $r_0\in(0,\ 1)$，使得 $D\subset r_0C$；(2) 有 T_0: $C_K\to cf(K)$ 与 $w\in\mathring{K}$ 使得 T_0 满足条件$(XC,\ \partial C_K)$与$(XQ,\ \partial D,\ w)$；(3) 有 K 映象 T: $C_K\times I\to cf(K)$ 使得(i) 条件(2.3)、(2.4)被满足；(ii) T_I 是个凝聚映象；(iii) $E_\vee(T_I,\ \partial C_K)$有界．

则，以下两个命题择一成立：或(3.1)$E_\vee(T_1,\ C_K^0\backslash D)$无界；或(3.2)方程(1.1)在 $C_K^0\backslash D$ 中有正解．

证 设 $E_\vee(T_1,\ C_K^0\backslash D)$有界．现在：

1．可以证明，有 $\beta\in(0,\ 1)$使得，对于任意的 $\lambda\in(\beta,\ 1)$恒有

$$x\bar{\in}\lambda T_I(x)\quad(x\in\partial C_K\cup\partial D_K),\tag{2.11}$$

且恒使定义如下的映象 F_λ: $D_K\to cf(K)$无不动点：

$$F_\lambda(x):=\begin{cases}\{w\} & (x=\theta),\\ r(x)\lambda T_0\left(\dfrac{x}{r(x)}\right)+(1-r(x))w & (x\in D_K\backslash\{\theta\}),\end{cases}\tag{2.12}$$

这里，r 是 D 的 Minkowski 泛函．

2．对于任意的 $\lambda\in(\beta,\ 1)$，定义映象 F: $C_K\times I\to cf(K)$ 与 F_i: $C_K\to cf(K)$如下

$$F(x,\ t):=\begin{cases}\lambda T(x,\ t) & (x\in C_K\backslash D,\ t\in I),\\ (1-r(x))w+r(x)\ \lambda T\left(\dfrac{x}{r(x)},\ t\right) & (x\in D_K\backslash\{\theta\},\ t\in I)\\ \{w\} & (x=\theta,\ t\in I),\end{cases}\tag{2.13}$$

$$F_i(x):=F(x,\ i)\quad(x\in C_K,\ i=0、1).$$

可以证明，F 与 F_i 满足定理 2.1 关于 T 与 T_i 的所有条件限制，例如

(1) 由于(2.12)所示的 $F_\lambda = F_0|D_K$, 故 F_0 在 D_K 中无不动点. 还可以证明, F_0 满足条件$(XC,\ \partial C_K)$.

(2) 不难证明, F 是个 K 映象. 又因为 T_I 是凝聚的, 故由(2.13)可证得, F_I 也是凝聚映象.

(3) 由于 $F(x,\ t)=\lambda T(x,\ t)(x\in C_K\backslash D^0,\ t\in I)$, 故(i)由(2.11)可见, (2.4)对于(把 T_I 换为)F_I 也成立; (ii) 由定理的条件(3)可得 $E_\vee(F_I,\ \partial C_K)$有界; (iii) 由"$E_\vee(T_1,\ C_K^0\backslash D)$有界"的设可得, $E_\vee(F_1,\ C_K\backslash D^0)$有界.

故由定理 2.1 可得, 有 $x_\lambda\in C_K^0\backslash D$ 使得 $x_\lambda\in F_1(x_\lambda)=\lambda T_1(x_\lambda)$.

3. 对于任意自然数 n, 取 $x_n\in C_K^0\backslash D$ 与 $\lambda_n\in(\beta,\ 1)$使得 $x_n\in\lambda_n T_1(x_n)$ 与 $\lambda_n\to 1$. 利用 T_I 的凝聚性可以证明, $\{x_n\}$含收敛子列 $x_{n_i}\to x\in C_K\backslash D^0$. 现由 T 的闭性便得: $x\in T_1(x)$, 又由(2.4)得, $x\in C_K^0\backslash D$.

仿定理 2.2 的证明, 由上述结果立得如下的

定理 2.4 设(i) 定理 2.3 的条件(1)与(2)都被满足; (ii) 有 K 映象 T: $C_K\times I\to cf(K)$使得条件(2.3)与(2.4)都被满足, 还使得 T_I 是个广义有界的凝聚映象. 则, 方程(1.1)在 $C_K^0\backslash D$ 中有正解.

定理 2.5 设(1) T_1: $C_K\to cf(K)$是个广义有界的凝聚闭映象; (2) 有 D 与 $r_0\in(0,\ 1)$使 $D\subset r_0C$; (3) 有 $w\in C_K^0\backslash D$ 使得 T_1 在 ∂C_K 与 ∂D_K 上满足条件$(MS,\ w)$(见[7]). 则, 方程(1.1)在 $C_K\backslash D^0$ 中有正解.

证　不妨设方程(1.1)在边界 $\partial C_K\cup\partial D_K$ 上没有解. 这时, 构造映象 T: $C_K\times I\to cf(K)$与 T_0: $C_K\to cf(K)$如下

$$T(x,\ t):=tT_1(x)+(1-t)w\quad(x\in C_K,\ t\in I),$$

$$T_0(x):=\{w\}\quad(x\in C_K).$$

可以证明, 定理 2.2 的条件都被满足. 现由定理 2.2 便得, 本定理的结论成立.

参　考　文　献

[1] Canetti, A., Marino G., & Pietramala G., *Nonlinear Anal. TMA.*, **17**: 1 (1991), 11—20.

[2] Petryshyn, W. V., *J. Math. Anal. Appl.*, **133** (1988), 297—305.

[3] Smart, D. R., Fixed point theorems, Cambridge Univ. Press., New York/London, 1980.

[4] Potter, A. J. B., *J. London Math. Soc.*, **5** (1972), 414—416.

[5] Browder F. B., Lecture Notes, University of Montreal, 1966.

[6] Dugundji, J., *Pacif. J. Math.*, **1** (1951), 353—367.

[7] 杨书郎, 数学学报, **33**: 6 (1990), 828—835.

[8] 杨书郎, 应用数学学报, **13**: 3 (1990), 351—357.

[9] 杨书郎, 厦门大学学报(自然科学版), **28**: 5 (1989), 467—471.